

§ Εφαρμογές καμπυλών κ' επιφανιών 2ου βαθμού:

• Καμπύλες:

As θεωρήσουμε την Εξίσωση στο $\mathbb{R}^2$:

$$Ax^2 + 2Bxy + C \cdot y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. (*)$$

Θέλουμε να βρούμε έναν ενιαίο τρόπο για την Εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης.

Ορισμός:

Δίνεται η $(*)$ και υποθέτουμε ότι δεν είναι Τυπός ευθείων. Έστω $P_0(x_0, y_0)$ σημείο της καμπύλης.

Μια ευθεία (ε) από το P_0 , με Εξίσωση:

$ax + by + \gamma = 0$, θα λέγεται εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης ανν: το βυβούμε:

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + C \cdot y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \\ ax + by + \gamma = 0 \end{cases}$$

Έχει διπλή λύση.

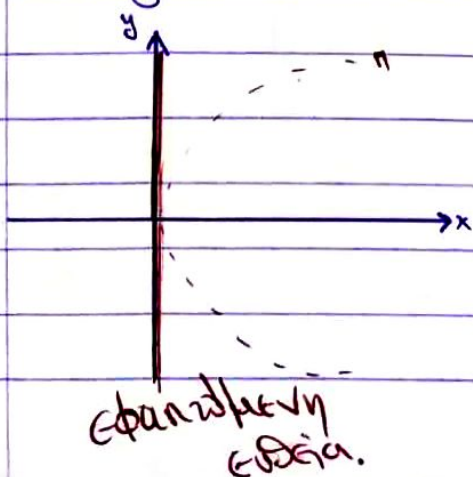
Σημείωση:

① Ο ορισμός αυτός αφορά μόνο αλγεβρικές καμπύλες 2ου βαθμού.

② Δεν είναι αλήθεια ότι αν μια ευθεία (ε), τέμνει σε ένα και δύο σημεία τότε θα είναι και εφαπτομένη ευθεία στο σημείο αυτό.

Για παράδειγμα, as θεωρήσουμε την παραβολή:

$$(1): y^2 = 2x.$$



Ο άξονας Ox τείνεται zum παραβολής σε ένα και μόνο σημείο, (το $(0,0)$) αλλά δεν είναι εφαπτομένη ευθεία. Η εφαπτομένη ευθεία στο $(0,0)$ είναι ο άξονας Oy .

Πρόβλημα 1:

Δίνεται η καμπύλη 2ου βαθμού:

$$Ax^2 + 2Bxy + C \cdot y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \\ (A, B, C) \neq (0, 0, 0).$$

Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ της καμπύλης, είναι:

$$Ax_0 \cdot X + B(X \cdot y_0 + x_0 \cdot Y) + C \cdot y_0 \cdot Y + D \cdot (x_0 + X) + E \cdot (y_0 + Y) + F = 0$$



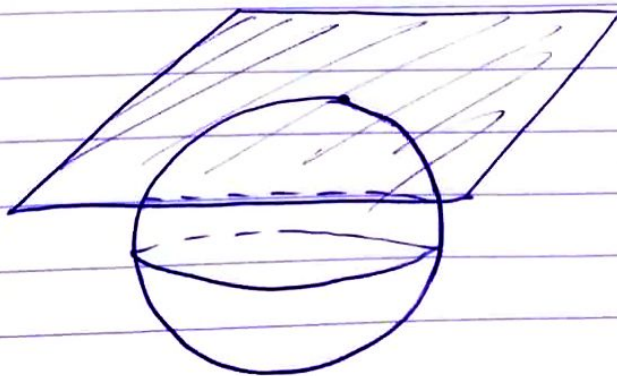
Πρόβλημα 2:

Το εφαπτομένο ~~επίπεδο~~ επίπεδο μιας επιφάνειας 2ου βαθμού με εξίσωση:

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \cdot z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0,$$

σε ένα σημείο $P_0(x_0, y_0)$ είναι:

$$a_{11} x_0 \cdot X + a_{22} y_0 \cdot Y + a_{33} z_0 \cdot Z + \\ + a_{12} (y_0 \cdot X + x_0 \cdot Y) \\ + a_{13} (z_0 \cdot X + x_0 \cdot Z) \\ + a_{23} (y_0 \cdot Z + z_0 \cdot Y) \\ + a_{14} (X + x_0) + a_{24} (Y + y_0) + a_{34} (Z + z_0) + a_{44} = 0$$



Άσκηση:

Να εφετασθεί, τι παριστάνει στον χώρο η εξίσωση:
 $5x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 8xz = 1$.

Λύση:

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή: ~~$5x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 8xz$~~

$$Q(x, y, z) = 5x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 8xz.$$

Ο πίνακας της Q , είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

...

$$0 = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 30\lambda - 8.$$

Από θεωρία γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 3 ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση:

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 30\lambda - 8.$$

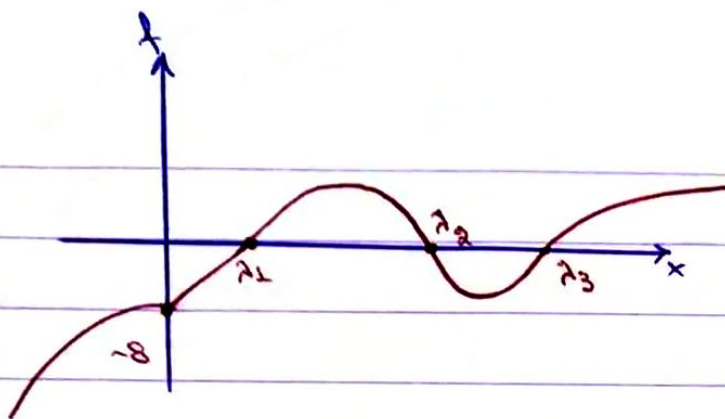
Ας εφετάσουμε λοιπόν την f ως προς την μονομελή Υποδείζουμε την $f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 24\lambda + 30 = 3(\lambda^2 - 8\lambda + 10)$.

Η f' μηδενίζεται για αριθμούς $4 - \sqrt{6}$ κ' $4 + \sqrt{6}$.

	0	$4 - \sqrt{6}$	$4 + \sqrt{6}$
$\lambda - (4 - \sqrt{6})$	-	0	+
$\lambda + (4 - \sqrt{6})$	-	-	0
	+	-	+

↗ ↘ ↗

Όπως $f(0) = -8$.



Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \infty)$,
και $f(0) = -8 \Rightarrow 0$ ρίζα της f είναι θετική.

Οπότε $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$.

Από το θεώρημα, υπάρχει ελάχιστο συντελεστής.

Ωστε η αλγεβρική εξίσωση να γίνει:

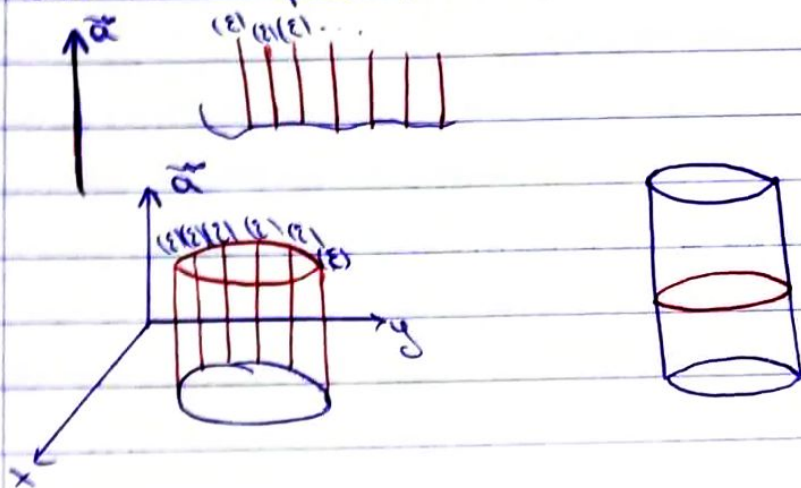
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 1 \Rightarrow \text{"ελλειψοειδές"}.$$

§ Ειδικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$.

① Κυλινδρικές επιφάνειες.

Ορισμός:

Μια επιφάνεια λέγεται κυλινδρική όταν παράγεται από μια ευθεία, η οποία κινείται έτσι ώστε να είναι παράλληλη ως προς σταθερό διάνυσμα $\vec{a} = (a, b, c)$, και να συναντάει μια σταθερή καμπύλη.



Η ευθεία (ℓ) λέγεται γενέτειρα της επιφάνειας, και η καμπύλη που συναντάει η γενέτειρα, λέγεται οδηγός της επιφάνειας.

Πρόβλημα:

Να βρεθεί η εξίσωση κυλινδρικής επιφάνειας με γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\vec{a}$ και οδηγό την καμπύλη (ω) : $\{f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0\}$.

Απάντηση:

Έστω ότι:

$$\omega) \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}, \text{ είναι οι εξισώσεις της γενέτειρας ευθείας.}$$

Οι ευθείες που είναι παράλληλες με την (ε), θα έχουν την μορφή: $(ε_{\lambda}): \begin{cases} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = \lambda \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = \lambda \end{cases}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

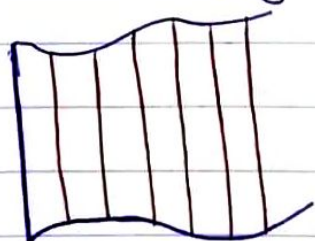
Για να τέμνουν την κορυφή (ε), οι ευθείες $(ε_{\lambda})$, θα πρέπει: $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = \lambda \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = \lambda \\ f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$.

Έχουμε 4-εξισώσεις και 3-αγνωστούς, τους x, y, z . Με απαλοιφή των x, y, z καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής $\phi(\lambda) = 0$. $\Rightarrow$ έχουμε συν εξίσωση $\phi(A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1, A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2) = 0$.

Η εξίσωση αυτή ~~παριστά~~^{προσέχει} των ~~εξισώσεων~~ επιφανείων που ζητάμε.

Συμπέρασμα:

Κάθε εξίσωση της μορφής: $\phi(A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1, A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2) = 0$, όπου $(A_1, B_1, \Gamma_1) \times (A_2, B_2, \Gamma_2) \neq \vec{0}$, παριστάει κυλινδρική επιφάνεια με γενέτριες παράλληλες προς την ευθεία: $(ε): \begin{cases} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \end{cases}$.



Ενδιαφέροντα παρατηρήση:

Η εξίσωση $f(x, y) = 0$ στον $\mathbb{R}^3$, παριστάει κυλινδρική επιφάνεια με γενέτριες παράλληλες προς την ευθεία: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Οπότε κάθε εξίσωση στο $\mathbb{R}^3$ της μορφής $f(x, y) = 0$ με μεταβλητή z , παριστάει κυλινδρική επιφάνεια.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η εφίπωση της κυλινδρικής επιφάνειας που έχει οδηγό την παραβολή: $(C): \{y = x^2 - 5x + 6, z = 0\}$, και γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\vec{a} = (3, -3, 5)$.

Απάντηση:

Η ευθεία $(E): \left\{ \frac{x}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{5} \right\}$ ή ισοδύναμα η:

$(E): \begin{cases} x + y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases}$, είναι παράλληλη προς το $\vec{a}$.

Επομένως οι ευθείες $(E_{\lambda\mu}): \begin{cases} x + y = \lambda \\ 5x + 3y = \mu \end{cases}$, είναι

παράλληλες προς την (E) . Οι τιμές των λ, μ έστω ώστε οι $(E_{\lambda\mu})$ να τέμνουν την καμπύλη (C) , βρίσκονται θεωρώντας το σύστημα:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ z = 0 \\ x + y = \lambda \\ 5x + 3y = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = \lambda - \frac{\mu}{5} \\ y = \frac{\mu}{5} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εφίπωση έχουμε:

$$\left(\lambda - \frac{\mu}{5} \right)^2 - 5 \left(\lambda - \frac{\mu}{5} \right) + 6 - \frac{\mu}{5} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως: } \lambda &= x + y, \mu = 5x + 3y \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(x + y - \frac{5y + 3x}{5} \right)^2 - 5 \left(x + y - \frac{5y + 3x}{5} \right) + 6 - \frac{5y + 3x}{5} &= 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2:

NSC → η Εξίσωση: $z^2 - 4xy - 2y^2 + 2xz + 1 = 0$,
προσδιορίζει κυλινδρική επιφάνεια.

Απάντηση:

Θα πρέπει η δοσμένη Εξίσωση να γραφτεί
στην μορφή:

$$f(\overbrace{A_1x + \dots + A_sx}^{n_1}, \overbrace{A_{s+1}x + \dots + A_{s+n_2}x}^{n_2}) = 0.$$

$$\begin{aligned}\text{Έχουμε: } 0 &= z^2 - 4xy - 2y^2 + 2xz + 1 \\ &= z(z - 2y) + 2x(z - 2y) + 1 \\ &= (z - 2x) \underbrace{(z - 2y)}_{\pi_2} + 1\end{aligned}$$

Έχουμε δοσόν κυλινδρική επιφάνεια με
γενέτειρα παράλληλη προς την ευθεία:

$$(ε): \{ z - 2y = 0, z - 2y = 0 \}.$$

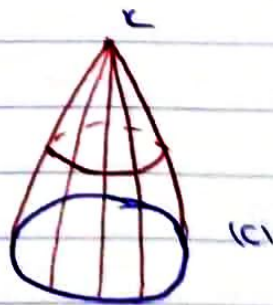
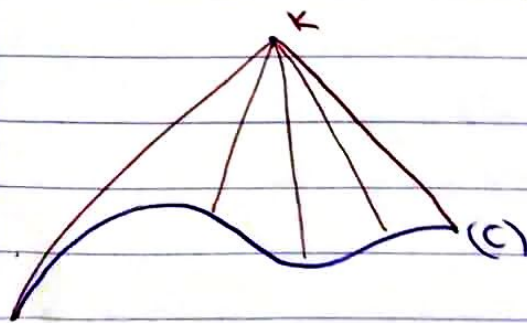
Η οδηγός καμπύλη δίνεται από την τομή
της επιφάνειας με το επίπεδο $z=0$

$$\text{Οπότε: } \begin{cases} z^2 - 4xy - 2y^2 + 2xz + 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -4xy + 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

§ Κωνικές επιφάνειες.

Ορισμός:

Μια επιφάνεια λέγεται κωνική ~~εφόσον~~ όταν
παράγεται από μια ευθεία η οποία κινείται
έτσι ώστε να περνάει από σταθερό σημείο
και να συναντάει μια σταθερή καμπύλη.



(5)

Το επίπεδο π , τέμνει κορυφή της επιφάνειας
και η σταθερή καμπύλη τέμνει οδηγό της επιφάνειας.
Η ευθεία που παράγει την επιφάνεια τέμνει γενέτρα.

Πρόβλημα:

Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής επιφάνειας
με κορυφή το επίπεδο $\pi(x_0, y_0, z_0)$ και οδηγό των
καμπύλων $(C): \{f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0\}$.

Απάντηση:

Αφού η γενέτρα περνάει από την κορυφή
 $K(x_0, y_0, z_0)$ θα έχει εξίσωση:

$$(E): \left\{ \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{\delta} \right\}$$

Επειδή (E) και (C) έχουν κοινά επίπεδα, έχω:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \\ \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{\delta} \end{cases}$$

Με ομοιομορφία κατασκευάζουμε γενν. εξίσωση:

$$\Phi\left(\frac{b}{a}, \frac{\delta}{a}\right) = 0 \quad (=) \quad F(a, b, \delta) = 0, \text{ όπου } F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Ομογ. ευρεία.

Οπλ: $F(ta, tb, t\delta) = t^k \cdot F(a, b, \delta)$.

• Το k τέμνει βαθμύς ομογένειας.

Δίδω:
$$\begin{cases} x-x_0 = ta \\ y-y_0 = tb \\ z-z_0 = t\delta \end{cases} \Rightarrow F(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

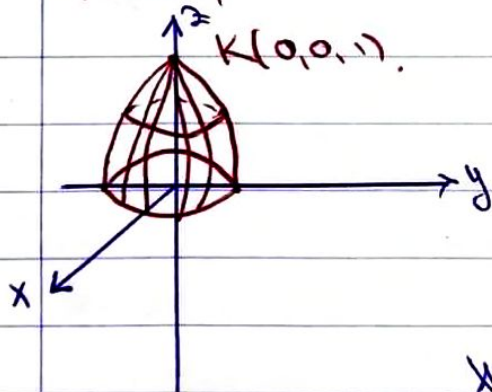
Αρα: η εξίσωση της επιφάνειας που
 ζητάμε είναι: $F(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$,
 όπου F : ομογενής συνάρτηση.

Συμπέρασμα: Κάθε εξίσωση της μορφής:
 $F(A_1x+B_1y+C_1z+D_1, A_2x+B_2y+C_2z+D_2, A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0$,
 παριστάει κωνική επιφάνεια με κορυφή
 των ριζών των εξισώσεων:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

Π.χ Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας
 με κορυφή το σημείο $K(0,0,1)$ και
 οδηγό την ελκυστή: $(C): \{x^2+y^2=1, z=0\}$.

Λύση:



Η γενική μορφή έχει εξίσωση:

$$(E): \left\{ \frac{x-0}{a} = \frac{y-0}{b} = \frac{z-1}{\gamma} \right\}$$

Η (E) περιγράφει την (C),
 για τυχόν a, b, γ , έτσι ώστε να
 ικανοποιεί το εξής σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \\ \frac{x}{a} = \frac{z-1}{\gamma} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \\ y = \frac{b}{a} \cdot x \\ z = 1 + \frac{\gamma}{a} \cdot x \end{cases} \quad (1)$$

6

$$\text{Από τις τρεις εξισώσεις} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=-a/8 \\ x=-a/8 \end{cases}$$

Αντικαθ. στην 1η έχω:

$$\frac{b^2}{8^2} + \frac{a^2}{8^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 8^2 = 0.$$

$$\text{Άρα } F(a, b, 8) = a^2 + b^2 - 8^2.$$

$$\text{Οπώς: } x=a, y=b, z=8-x.$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - (z-8)^2 = 0.$$

Π.χ. Να δομ. η εξίσωση:

$$9y^2 - 11z^2 + 6yz - 18xz + 6y - 72x - 58z - 47 = 0. \quad (1),$$

παραστάει κωνική επιφάνεια.

Λύση:

$$\text{Θέτουμε: } F(x, y, z) = 9y^2 - 11z^2 + 6yz - 18xz + 6y - 72x - 58z - 47 = 0.$$

Για να είναι η (1) κωνική επιφάνεια πρέπει να $\exists a, b, 8$, τ.ω. η $F(x-a, y-b, z-8)$ να είναι ομογενής ως προς $x-a, y-b, z-8$.

Θέτουμε: $X=x-a, Y=y-b, Z=z-8$, έχω:

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) = & 9Y^2 - 11Z^2 + 6YZ - 18XZ + (18b + 6y + 6)Y \\ & + (-22y + 6b - 18a - 58)Z + (-18y - 72)X \\ & + (-18b^2 - 11y^2 - 6by - 18ay + 6b - 72a - 58y - 47). \end{aligned}$$

$$\text{Λέοντας έχω: } \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow \text{κωνική επιφάνεια}$$